Proceedings of IAM, V.14, N.1, 2025, pp.3-10
DOI:10.30546/2225-0530.14.1.2025.03

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА ГРОССА-СОБОЛЕВА

Ш.М. Насибов

Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете,
Баку, Азербайджан
e-mail: nasibov_sharif@mail.ru

Абстракт. Доказывается одно точное интегральное неравенство, с помощью которого выводится одно интерполяционное неравенство Соболева. Предлагается одно обобщение логарифмического неравенства Соболева на основе интерполяционного неравенства Соболева.

Ключевые слова: Преобразование Фурье, неравенство Хаусдорфа—Юнга, точное интегральное неравенство, интерполяционное неравенство Соболева, логарифмическое неравенство Гросса—Соболева.

AMS Subject Classification: 35Q70, 39B72.

1. Введение

В разделе доказывается одно точное интегральное неравенство, из которого в силу неравенства Хаусдорфа-Юнга выводится интерполяционное неравенство Соболева.

1.1. Интегральное неравенство.

Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения:

$$\|U\|_p = \left\{ \int_{R^n} |U(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

есть норма в $L_p(R^n)$, индекс p в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p=2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Пусть $k-$ любое положительное число. Пусть $\rho-$ заданное положительное число такое, что при $n-k \leq 0$ число ρ любое, а при $n-k>0$ ρ удовлетворяет неравенству $\rho < \dfrac{2k}{n-k}$. Положим $\alpha = \dfrac{n\rho}{k(\rho+2)}$; для заданного α определим $\chi = \sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$.

Для любого $\theta > 0$ определим $\Gamma(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\theta-1} dt -$ гамма-функция Эйлера;

$B(\beta,\gamma) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1} dt$ для всех $\beta > 0,\ \gamma > 0 -$ бета-функция Эйлера;

$\sigma_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{k} B\left(\frac{n}{k}, \frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha k}{2n}} = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\left(\frac{\sigma_n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{k\alpha}\right)}\right]^{\frac{\alpha k}{2n}}. \tag{1}$$

Лемма 1. Пусть $k,\rho,\alpha -$ определенные выше числа, $V(x) \in L_2(R^n)$, $r^{k/2}V(x) \in L_2(R^n)$, $r = |x|$. Тогда справедливо следующее интегральное неравенство:

$$\|V\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \le K_g(\alpha)\|r^{k/2}V\|^{\alpha}\|V\|^{1-\alpha}, \tag{2}$$

где $K_g(\alpha) -$ константа, определенная формулой (1). Константа является точной: неравенство (2) переходит в равенство при

$$V(x) = V_0(r) = \frac{\omega_1}{(\omega_2 + \omega_3 r^k)^{1+1/\rho}},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3 -$ произвольные положительные числа.

1.2. Неравенство Хаусдорфа-Юнга.

Лемма 2. Пусть

$$\hat{U}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{-i(x,\xi)}U(x)dx, \quad \xi \in R^n,$$

есть преобразование Фурье функции $U(x), \hat{U} \in L_p(R^n), 1 \le p \le 2.$ Тогда справедливо следующее неравенство Хаусдорфа-Юнга:

$$\|U\|_{p'} \le K_B(p)\|\hat{U}\|_p,\ K_B(p) = \left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/p}\left(\frac{p'}{2\pi}\right)^{-1/p'}\right]^{n/2},$$

$1 \le p \le 2, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ с наилучшей константой Бекнера-Бабенко [1, 6, 7, 12].

1.3. Результаты.

Теорема 1. Пусть $k, \rho, \alpha -$ определенные выше числа, $U(x) \in L_2(R^n), r^{k/2}\hat{U}(\xi) \in L_2(R^n), r = |\xi|.$ Тогда справедливо следующее мултипликативное неравенство Соболева

$$\|U\|_{\rho+2} \le \overline{K}_0 \left\| r^{k/2}\hat{U}(\xi)\right\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha} \quad . \tag{3}$$

Здесь $\overline{K}_0 = K_g(\alpha) K_B\left(\dfrac{\rho+2}{\rho+1}\right), K_g(\alpha)$ определено формулой (1).

Приведем схему доказательства (3).

В силу неравенства (2) заключаем, что

$$\|\hat{U}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \le K_g(\alpha) \left\| |\xi|^{k/2} \hat{U} \right\|^{\alpha} \|\hat{U}\|^{1-\alpha}. \tag{4}$$

Но в силу теоремы Планшереля-Парсеваля имеем

$$\|\hat{U}\| = \|U\|. \tag{5}$$

Следовательно, при условиях теоремы 1 заключаем, что $\hat{U} \in L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(R^n).$ Тогда по неравенству Хаусдорфа-Юнга имеем

$$\|U\|_{\rho+2} \le K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right) \le \|\hat{U}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}. \tag{6}$$

Теперь из (4)-(6) следует (3).

Пусть в теореме 1 $k = 2$. Тогда в силу соотношения $\left\| |\xi| \hat{U} \right\| = \|\nabla U\|$ из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть $\rho \in (0, \infty)$ при $n = 1,2$, а при $n \ge 3$ $\rho \in \left(0, \dfrac{4}{n-2}\right)$,

$\infty = \dfrac{\rho n}{2(\rho+2)}$. Далее пусть $U(x) \in H^1(R^n)$.

Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Гальярдо- Ниренберга-Соболева:

$$\|U\|_{\rho+2} \le \overline{K}_0 \|\nabla U\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha}. \tag{7}$$

Здесь $\overline{K_0} = K_g(\alpha) K_B\left(\dfrac{\rho+2}{\rho+1}\right)$, где

$$K_g(\alpha)=\frac{1}{\chi}\left[0.5\sigma_n B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha}{n}}=\frac{1}{\chi}\pi^{\alpha/2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2\alpha}\right)}\right]^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Пусть в теореме 1 $k=4$. Тогда в силу соотношения $\left\||\xi|^2\hat{U}\right\|=\|\Delta U\|$ [5] из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 2. Пусть $\rho\in(0,\infty)$ при $n\le 4$, а при $n>4$ $\rho\in\left(0,\frac{8}{n-4}\right)$, $\infty=\frac{n\rho}{4(\rho+2)}$. Пусть $U(x)\in L_2(R^n)$, $\Delta U\in L_2(R^n)$. Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Соболева:

$$\|U\|_{\rho+2}\le\overline{K}_0\|\Delta U\|^{\alpha}\|U\|^{1-\alpha}. \tag{8}$$

Здесь

$$\overline{K_0}=K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right),$$

где

$$K_g(\alpha)=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{4}B\left(\frac{n}{4},\frac{n(1-\alpha)}{4\alpha}\right)\right]^{2\alpha/n}.$$

2. Логарифмическое неравенство Гросс-Соболева.

Теорема 2. Пусть $k-$произвольное положительное число, $U(x)\in L_2(R^n)$ и $|\xi|^{k/2}\hat{U}(\xi)\in L_2(R^n)$.

Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса-Соболева:

$$\int_{R^n}\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right)dx\le\frac{n}{k}\ln\left[\frac{k\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n}\left\||\xi|^{k/2}\hat{U}\right\|^2}{n\pi^k e^{k-1}\|U\|^2}\right]. \tag{9}$$

Как следствие, из теоремы 2 вытекают следующие предложения.

Предложение 1. Пусть $U(x)\in H^1(R^n)$. Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросс-Соболева:

$$\int_{R^n}\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right)dx\le\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\|\nabla U\|^2}{\pi en\|U\|^2}\right). \tag{10}$$

Неравенство (10) является точным: оно переходит в равенство при

$$U(x) = a\exp\left(-b|x|^2\right),$$

где $a, b -$ произвольные положительные постоянные.

Положим в (9) $k = 4.$

Предложение 2. Пусть $U(x) \in H^2(R^n).$ Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросс-Соболева:

$$\int_{R^n} \frac{|U|^2}{\|U\|^2} \ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right) dx \le \frac{n}{4} \ln\left[\frac{4\left(\frac{\sigma_n}{4}\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\right)^{4/n} \|\Delta U\|^2}{n\pi^4 e^3 \|U\|^2}\right]. \tag{11}$$

Неравенство (10) впервые доказано Гроссом [11]. Бекнер [9] отмечает, что после того, как Гросс нашёл логарифмическое неравенство Соболева, оно стало народным фольклором. Другие неравенства типа Гросс-Соболева доказаны в [8, 10, 12, 14] и др.

Приведем схему доказательства неравенства (9). Перепишем неравенство (3) в следующем виде:

$$\|U\|_{\frac{2n}{n-\alpha k}} \le K_B(\alpha) K_g(\alpha) \left\||\xi|^{k/2} \hat{U}\right\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha}, \tag{12}$$

где

$$K_B(\alpha) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{\alpha k}{2}} \frac{(n-\alpha k)^{\frac{n-\alpha k}{4}}}{(n+\alpha k)^{\frac{n+\alpha k}{4}}},$$

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}} \left[\frac{\sigma_n}{k} B\left(\frac{n}{k}, \frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha k}{2n}}.$$

Легко показать, что $\lim\limits_{\alpha \to 0+0} K_g(\alpha) = 1$ и $K_B(0) = 1.$ Тем самым неравенство (12) остаётся справедливым и при $\alpha = 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \|U\|_{\frac{2n}{n-\alpha k}} - K_0 \left\||\xi|^{k/2} \hat{U}\right\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha},$$

где $K_0 = K_B(\alpha) K_g(\alpha).$ Так как $f(\alpha) \le 0$ для $\alpha \in [0,1),$ то $f'(0) \le 0.$ При вычислении $f'(0)$ следует иметь в виду, что $K'_B(0) = -\ln(\pi e)$ и

$$K'_g(0) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{ek\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n}}{n}\right].$$

Неравенство (2) также применяется при доказательстве обобщенного неравенства энтропии

$$-\int_{R^n}\frac{|U(x)|^2}{\|U\|^2}\ln\left(\frac{|U(x)|^2}{\|U\|^2}\right)dx \le \frac{n}{k}\ln\left[\frac{ek\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n}\left\|r^{k/n}U\right\|^2}{n\|U\|^2}\right]. \qquad (13)$$

При условии, что $U(x)\in L_2(R^n),\, r^{k/2}U(x)\in L_2(R^n)$ для любого $k>0$, неравенство (13) является точным: оно переходит в равенство при

$$U(x) = U_0(r) = a\exp\left(-b|x|^k\right),$$

где $a,b-$ произвольные положительные постоянные [5].

Замечание 1. Интерполяционное неравенство (7) доказано также в [13] с другой константой в нем. Это неравенство применяется при исследовании вопроса глобальной разрешимости задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера [2], а также в спектральной теории для оператора Шрёдингера [13].

Замечание 2. Неравенство (13) при $k=2$ анонсировано в [2], доказано в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К.И. Изв. АН СССР, Сер. мат., т.25, (1961), сс.531–542.
2. Насибов, Ш.М. Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шрёдингера// Докл. АН СССР, -1989. 307:3, -с.538–542
3. Насибов, Ш.М. О точной константе в одном неравенстве Соболева-Ниренберга и ее приложении к уравнению Шрёдингера// Российская Академия наук, серия математическая, -2009. 73:3, -с.127-150
4. Насибов, Ш.М. Об одном интегральном неравенстве и его применении к доказательству неравенства энтропии// Математические заметки, -2008. 84:2, -с.231-237.
5. Насибов, Ш.М. Об одном обобщении неравенства энтропии// Математические заметки, -2016. 99:2, -с. 278-282.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Гармонический анализ, Самосопряженность, М.: Мир, (1978).

7. Beckner W. Ann. Math., V.102, (1975), pp.159–182.
8. Beckner W. Forum Math., V.11, (1999), pp.105–137.
9. Beckner W., Pearson M. Bull. London Math. Soc., V.30, (1998), pp.80–84.
10. Carlen E.A. J. Func. Anal., V.101, (1991), pp.194–211.
11. Cross L. Amer. J. Math., V.97, (1975), pp.1061–1683.
12. Lieb E.H., Loss M. Analysis. Graduate Studies in Mathe matics. N.Y.: AMS, V.14, (2001).
13. Veling E.J. J. Ineqnal. Pure Appl. Math., V.3, N.4, (2002).
14. Weissler F.B. Tranc. Amer. Math. Soc., V.237, (1978), pp.255–259.

ON ONE GENERALIZATION OF THE GROSS-SOBOLEV LOGARITHMIC INEQUALITY

Sh.M. Nasibov[1]

[1]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: nasibov_sharif@mail.ru

Abstract. In the paper one exact integral inequality is proved, using which one interpolation Sobolev inequality is derived. One generalization of the logarithmic Sobolev inequality is proposed based on the interpolation Sobolev inequality.
Keywords: Fourier transform, Hausdorff-Young inequality, exact integral inequality, Sobolev interpolation inequality, Gross-Sobolev logarithmic inequality.

REFERENCES

1. Babenko K.I. Izv. AN SSSR, Ser. mat., t.25, (1961), ss.531–542.(Babenko K.I. Izv. USSR Academy of Sciences, Ser. mat., t.25, (1961), pp.531–542).
2. Nasibov SH M Ob optimalnykh konstantakh v nekotorykh neravenstvakh Soboleva i ikh prilozhenii k nelineinomu uravneniiu SHredingera Dokl AN SSSR -1989 307 3 -s 538 542 (. Nasibov, Sh. M. On Optimal Constants in Some Sobolev Inequalities and Their Application to the Nonlinear Schrödinger Equation// Dokl. Akad. Nasibov, -1989. 307:3, -pp.538–542)
3. Nasibov SH M O tochnoi konstante v odnom neravenstve Soboleva-Nirenberga i ee prilozhenii k uravneniiu SHredingera Rossiiskaia Akademiia nauk seriia matematicheskaia -2009 73 3 -c 127-150 (Nasibov, Sh. M. On an Exact Constant in a Sobolev-Nirenberg Inequality and Its Application to the Schrödinger Equation// Russian Academy of Sciences, Mathematical Series, -2009. 73:3, -pp.127–150)

4. Nasibov SH M Ob odnom integralnom neravenstve i ego primenenii k dokazatelstvu neravenstva entropii Matematicheskie zametki -2008 84 2 -c 231-237 (Nasibov, Sh. M. On an Integral Inequality and Its Application to the Proof of the Entropy Inequality// Mathematical Notes, -2008. 84:2, -pp.231–237.)
5. Nasibov SH M Ob odnom obobshchenii neravenstva entropii Matematicheskie zametki -2016 99 2 -c 278-282Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki, Garmonicheskij analiz, Samosopryazhennost', M.: Mir, (1978). (Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics, Harmonic analysis, Self-adjointness, Moscow: Mir, (1978). (Nasibov, Sh. M. On a Generalization of the Entropy Inequality// Mathematical Notes, -2016. 99:2, -p. 278-282.)
6. Beckner W. Ann. Math., V.102, (1975), pp.159–182.
7. Beckner W. Forum Math., V.11, (1999), pp.105–137.
8. Beckner W., Pearson M. Bull. London Math. Soc., V.30, (1998), pp.80–84.
9. Carlen E.A. J. Func. Anal., V.101, (1991), pp.194–211.
10. Cross L. Amer. J. Math., V.97, (1975), pp.1061–1683.
11. Lieb E.H., Loss M. Analysis. Graduate Studies in Mathe matics. N.Y.: AMS, V.14, (2001).
12. Veling E.J. J. Ineqnal. Pure Appl. Math., V.3, N.4, (2002).
13. Weissler F.B. Tranc. Amer. Math. Soc., V.237, (1978), pp.255–259.